Дмитриева Марина Валерьевна
кандидат физико-математических наук, доцент УлГУ,
член-корреспондент РАЕН

КОНСУЛЬТАЦИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ТРЕНИРОВОЧНО-ДИАГНОСТИЧЕСКОГО ТЕСТИРОВАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ) «ГОТОВИМСЯ К ЕГЭ» АЛГЕБРА

Продолжение

Задание 12 (ранее задание 13). Содержание критерия

ЕГЭ–2017-2022	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за **вычислительной** ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 12 (ранее задание 13)

ЕГЭ 2017	а) Решите уравнение $25^{\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2\cos(x+\pi)}$. б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.	31,7%
21.12.17 ТДТ	а) Решите уравнение $3^{2x+1} - 8\cdot 3^{x+1} + 39 = 0$. б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [1;2].	28,7%
ЕГЭ 2018	а) Решите уравнение $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x = \sin x - 1$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.	29,5%
20.12.18 ТДТ	а) Решите уравнение $sin^2\frac{x}{2} - cos^2\frac{x}{2} = -\cos 2x$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.	26,2%

Задание 12 (ранее задание 13)

29.05.19 ЕГЭ	а) Решите уравнение $$2\cos^2 x+2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0.$$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.	42,4%
10.12.19 ТДТ	**а) Решите уравнение** $$\sqrt{2}\sin(2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2\sin\frac{\pi}{4}.$$ **б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку** $[-3\pi;5\pi]$.	1,6%
10.07.20 ЕГЭ	а) Решите уравнение $$2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{2}\cos x=0.$$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.	42,9%
28.01.21 ТДТ	**а) Решите уравнение** $$8\sin^2 x-2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=9.$$ **б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку** $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.	37,7%
07.06.21 ЕГЭ	**13** а) Решите уравнение $$4\sin^3 x+3\sin x+4\sqrt{3}=4\sqrt{3}\cos^2 x.$$ б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.	37,6%

Основной резерв для повышения результативности выполнения заданий ЕГЭ – тригонометрическая (показательная, логарифмическая) задача **С12 (ранее задание 13)**. В группе учеников, набравших 60-80 баллов, вполне реально повысить процент выполнения этого задания до почти что 100%.

13 а) Решите уравнение

$$4\sin^3 x + 3\sin x + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\cos^2 x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

Группы участников	Количество		0 баллов		1 балл		2 балла	
	2020	2021	2020	2021	2020	2021	2020	2021
61-80	1071 (34%)	944 (36%)	149 (14%)	304 (32%)	206 (19%)	108 (11%)	716 (67%)	532 (57%)
81-100	176 (5,7%)	252 (9,6%)	2	7	13	9	161 (91%)	236 (93,6%)

Задание 12

а) Решите уравнение $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.	а) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) -7π.
а) Решите уравнение $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.	а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Баллы	Количество участников	Процент
0	1343	79,9%
1	76	4,5% (6,9% - ЕГЭ 2021)
2	261	15,5% (30,7% - ЕГЭ 2021)

Задание 12. Вариант 1

12

а) Решите уравнение $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

Решение.
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$5^{|\cos x|} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}.$$

При $\cos x \geq 0$ получаем уравнение $5^{\cos x} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$ — уравнение не имеет корней.

При $\cos x < 0$ получаем уравнение $5^{-\cos x} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$.

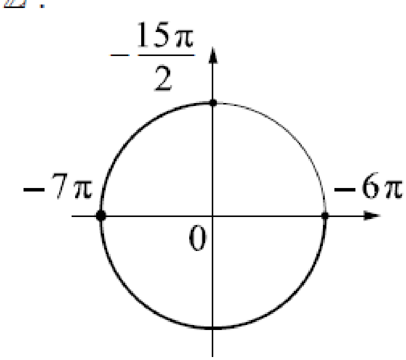
Пусть $y = 5^{\cos x}$. Тогда:

$$\frac{1}{y} - y = \frac{24}{5};\quad \frac{5y^2 + 24y - 5}{5y} = 0,\ \text{откуда}\ y = -5\ \text{и}\ y = \frac{1}{5}.$$

Значит, $5^{\cos x} = \frac{1}{5}$ или $5^{\cos x} = -5$. Второе уравнение решений не имеет, а из первого находим: $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

Получим число -7π.



Ответ: а) $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) -7π.

Задание 12 (ранее задание 13)

12 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

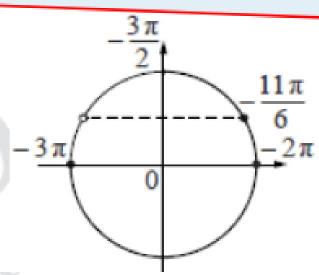
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:
$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$; $\sin x-2\sin^2 x=0$; $\sin x\cdot(2\sin x-1)=0$.

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$,

или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Для оценивания отбора корней с помощью тригонометрической окружности были сформулированы общие требования:

- указание начала и конца дуги,
- выделение рассматриваемой дуги,
- указание корней, принадлежащих этой дуге,
- при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге.

Вычислительная ошибка – ошибка, допущенная при выполнении арифметических действий:

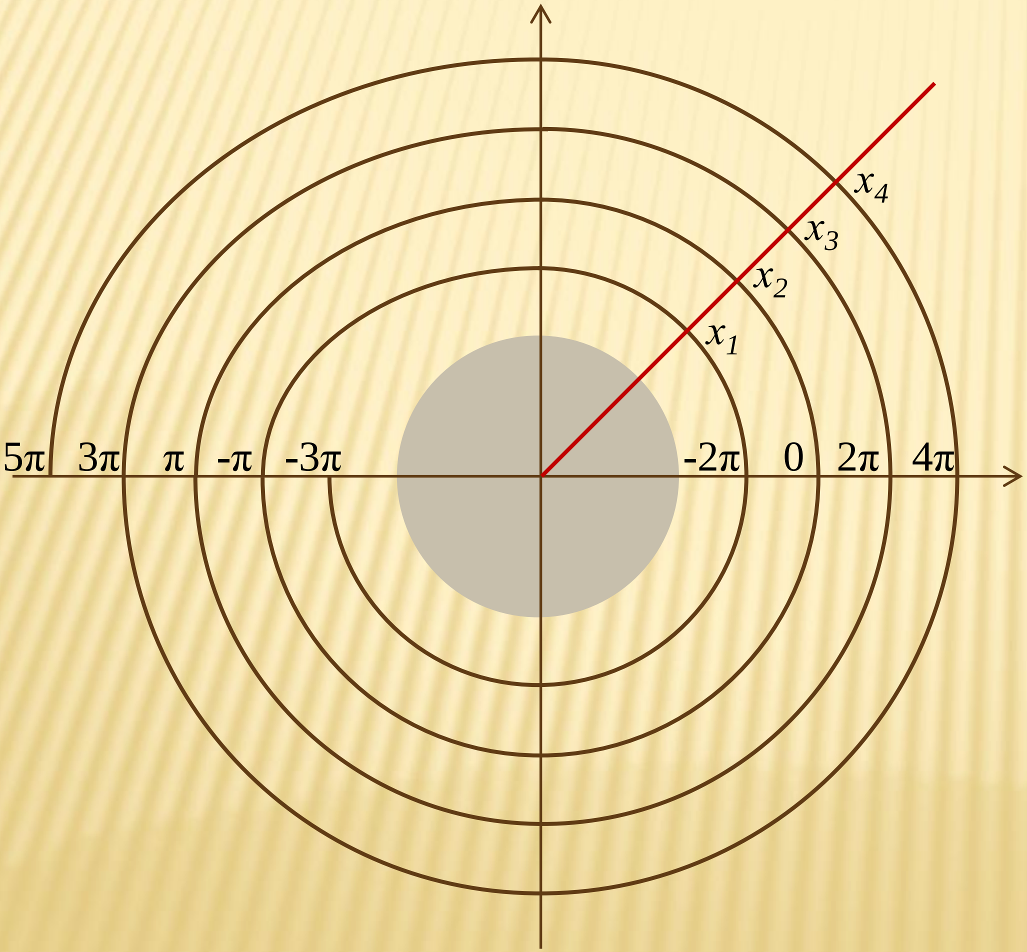
- сложение,
- вычитание,
- умножение,
- деление

Задание 12

а) $\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{17\pi}{4}$.

$x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$[-3\pi;5\pi]$



$$x_1=-2\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{7\pi}{4}$$

$$x_2=0+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

$$x_3=2\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{9\pi}{4}$$

$$x_4=4\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{17\pi}{4}$$

Задание 12 (ранее задание 13)

№13

$\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$

$\cos 2x + \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \cos\frac{\pi}{2}\sin x\right) + 1 = 0$

$\cos 2x + \sqrt{2}\left(1\cdot\cos x + 0\cdot\sin x\right) + 1 = 0$

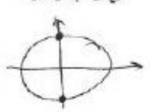
$\cos 2x + \sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

$2\cos^2 x \cancel{-1} + \sqrt{2}\cos x \cancel{+1} = 0$

$2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos x = 0$

$\cos x\left(2\cos x + \sqrt{2}\right) = 0$

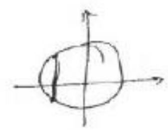
$\cos x = 0$



$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad k \in Z$

$2\cos x + \sqrt{2} = 0$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$



$x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k_2 \quad k_2 \in Z$

б)

$\boxed{-\frac{3\pi}{2}}$

$-3\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{12\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \boxed{-\frac{11\pi}{4}}$

$-3\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{6\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \boxed{-\frac{5\pi}{2}}$

Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \pm\frac{3\pi}{4} - 2\pi k_2,\ k \in Z\ k_2 \in Z\right\}$

б) $-\frac{11\pi}{4},\ -\frac{5\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2}$

а) Решите уравнение $\cos 2x + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

1 балл

Задание 12 (ранее задание 13)

№ 13

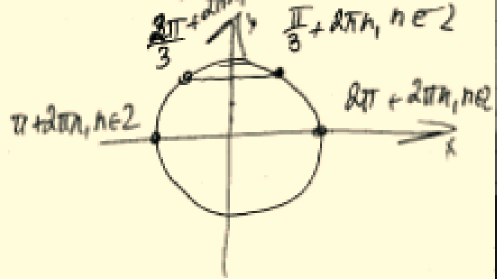
Ответ: а) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

$x = 2\pi n + \pi n, n \in Z$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$;

б) 2π; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$.

а) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$

~~Ограничения~~ $\frac{\pi}{2} - x$



$2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x = 0$

$\sin x(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$

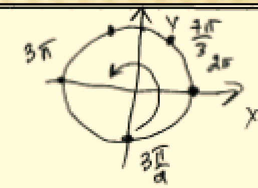
$\sin x = 0$ $\qquad$ $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

$x = 2\pi + \pi n, n \in Z$ $\qquad$ $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$x = 2\pi$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$



$2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$

$\frac{7\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

13) а) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{2}\cos x = 0$

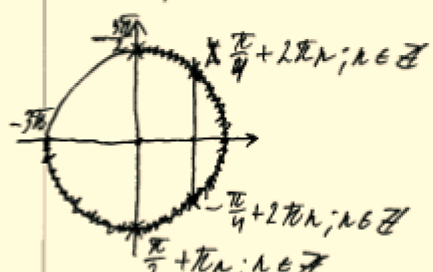
$2\cos^2 x - \sqrt{2}\cos x = 0$

$\cos x(2\cos x - \sqrt{2}) = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

б)



$\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z$

$\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$

б) $-\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{2}$

Задание 12 (ранее задание 13)

б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

$\pi \le \pi n \le \frac{5\pi}{2}$

$1 \le n \le 2,5$

$n = 1; 2.$

$x_1 = \pi;\ x_2 = 2\pi$

$\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{5\pi}{2}$

$1 \le \frac{1}{3} + 2k \le \frac{5}{2} \quad |\cdot 6$

$6 \le 2 + 12k \le 15$

$4 \le 12k \le 13$

$0,3 \le k \le 1,08$

$k = 1$

$x_3 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}$

$\pi \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \le \frac{5\pi}{2}$

$1 \le \frac{2}{3} + 2k \le \frac{5}{2} \quad |\cdot 6$

$6 \le 4 + 12k \le 15$

$2 \le 12k \le 11$

$0,1 \le k \le 0,9$

k – нет

Ответ: а) $\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};$

$\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) $\pi;\ 2\pi;\ \frac{7\pi}{3}.$

Задание 12 (ранее задание 13)

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in Z$$

б) $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$n = -2 \Rightarrow x = -2\pi$ (не подходит)

$n = -3 \Rightarrow x = -3\pi$ (подходит)

$n = -4 \Rightarrow x = -4\pi$ (подходит)

$n = -5 \Rightarrow x = -5\pi$ (не подходит)

$m = -1 \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{8\pi}{3}$ (подходит)

$m = -2 \Rightarrow x = -\frac{2\pi}{3} - 4\pi = -\frac{14\pi}{3}$ (не подходит)

$k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$ (не подходит)

Задание 12

а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Оценка эксперта:

1 балл.

На дуге указана точка, этой дуге не принадлежащая

№ 12

а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{\sqrt{\cos^2(-x)}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{\cos(-x)} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{-1\cdot\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4^{\cos x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

Введём новую переменную, пусть $4^{\cos x} = t$, $t>0$; тогда:

$\frac{1}{t} - t = \frac{3}{2} \quad /\times 2t$

$-2 + 2t^2 = -3t$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$; $a=2$, $b=3$, $c=-2$

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\cdot 2\cdot(-2) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{25} = 5$.

$t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3+5}{2\cdot 2} = \frac{2}{4} = 0{,}5$; $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-3-5}{2\cdot 2} = \frac{-8}{4} = -2$ (т.к., $t>0$

Вернёмся к исходной переменной:

$4^{\cos x} = 0{,}5$

$2^{2\cos x} = 2^{-1}$

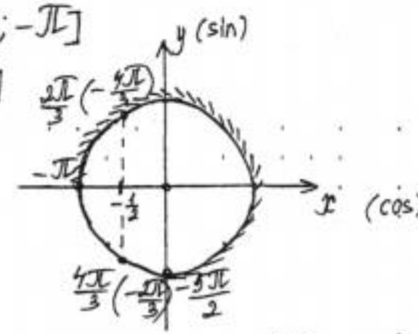
$2\cos x = -1$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$\left\{\begin{array}{l} x_k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z \\ x_n = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n\in Z \end{array}\right.$

б) $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

$-\frac{4\pi}{3} \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$



Ответ: а) $x_k = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\in Z$; $x_n = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n\in Z$; б) $x = -\frac{4\pi}{3}$

Задание 12

а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

№12.

1) $4^{\sqrt{1-\sin^2x}}-4^{\cos x}=\frac{3}{2}$

$\cos^2x=1-\sin^2x$

$\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2x}$

Если $\cos x\geq 0$, тогда:

$4^{\sqrt{1-\sin^2x}}-4^{\sqrt{1-\sin^2x}}\neq\frac{3}{2}$

$0\neq\frac{3}{2}$

$x\in\varnothing$.

Если $\cos x<0$, тогда:

$4^{\sqrt{1-\sin^2x}}-4^{-\sqrt{1-\sin^2x}}=\frac{3}{2}$

$4^{\sqrt{1-\sin^2x}}-\frac{1}{4^{\sqrt{1-\sin^2x}}}=\frac{3}{2}\,\Big|\cdot 4^{\sqrt{1-\sin^2x}}$

$4^{2\sqrt{1-\sin^2x}}-1=\frac{3}{2}\cdot 4^{\sqrt{1-\sin^2x}}$

Пусть: $4^{\sqrt{1-\sin^2x}}=t$, тогда.

$t^2-1{,}5t-1=0$.

$D=2{,}25+4=6{,}25$

$x_{1,2}=\frac{1{,}5\pm2{,}5}{2}=\left[\begin{matrix}2\\-0{,}5\end{matrix}\right.$

ВКИП:

$\left[\begin{matrix}4^{\sqrt{1-\sin^2x}}=2 \quad (1)\\ 4^{\sqrt{1-\sin^2x}}=-0{,}5 \quad x\in\varnothing\end{matrix}\right.$

(1): $2^{2\sqrt{1-\sin^2x}}=2$

$2\sqrt{1-\sin^2x}=1$

$\sqrt{1-\sin^2x}=0{,}5$

$1-\sin^2x=0{,}25$

$\sin^2x=0{,}75=\frac{3}{4}$

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x_1=\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$

$x_2=\pi-\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

2) $-\frac{5\pi}{2}\leq\frac{\pi}{3}+2\pi k\leq-\pi\,\Big|\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$-\frac{17\pi}{6}\leq2\pi k\leq-\frac{8\pi}{6}\,\Big|:2\pi$

$-\frac{17}{12}\leq k\leq-\frac{8}{12}$

$k=-1$ $\quad x_1=\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3}$

$-\frac{5\pi}{2}\leq\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leq-\pi\,\Big|\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

$-\frac{19\pi}{6}\leq2\pi n\leq-\frac{10\pi}{6}\,\Big|:2\pi$

$-\frac{19}{12}\leq n\leq-\frac{10}{12}$ $\quad n=-1$ $\quad x_2=-\frac{4\pi}{3}$.

Оценка эксперта: 0 баллов

Задание 12

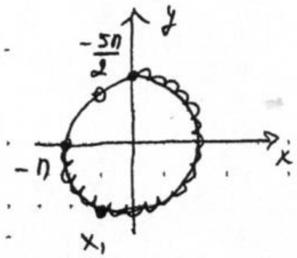
а) $\pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) -7π.

а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Оценка эксперта:

В этих работах отбор в б) не засчитан

б): $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

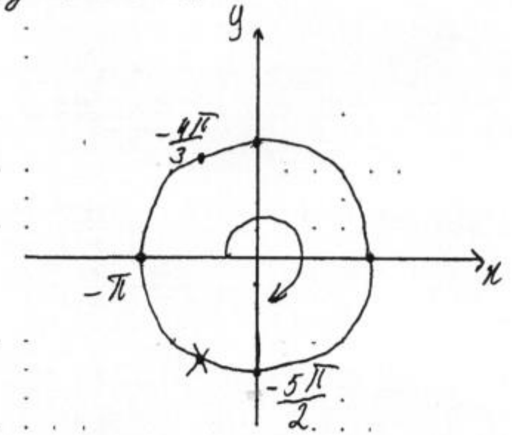


$x_1 = -2\pi + \frac{2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{4\pi}{3}$

б) Найдём все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$, с помощью числовой окружности.

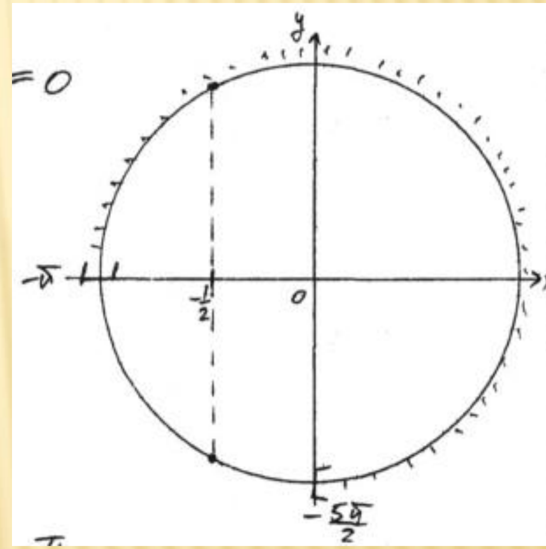


1) $-\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{4\pi}{3}$



б) $x \in [-\frac{5\pi}{2}; -\pi]$

$x = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Задание 12

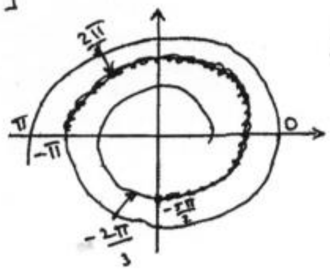
а) $\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; б) -7π.

а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Оценка эксперта:

В этих работах отбор в б) не засчитан

б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$



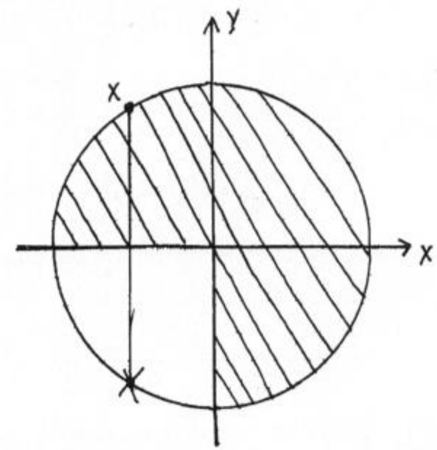
$x_1 = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = \frac{2\pi - 3\cdot 2\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $x_1 = \frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in z$

$x_2 = -\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in z$

б) $-\frac{4\pi}{3}$

б)



$x = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $n\in Z$; б) $-\frac{4\pi}{3}$

б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$ $\left[-\frac{7{,}5\pi}{3}; -\frac{3\pi}{3}\right]$

$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$ $\qquad x=\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

$k=-1$; $x=-\frac{4\pi}{3}\in\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

$k=-2$; $x=-\frac{10\pi}{3}\notin\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

$\cancel{x=\frac{4\pi}{3}+2\pi}$

$n=-1$; $x=-\frac{2\pi}{3}\notin\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

$n=-2$; $x=-\frac{8\pi}{3}\notin\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$; $\frac{4\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$

б) $-\frac{4\pi}{3}$

Задание 12

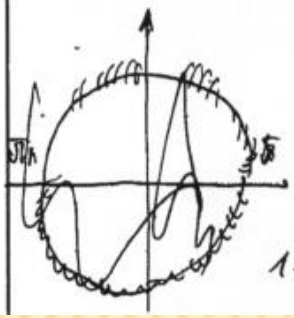
12 а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$1-\sin^2 x \geq 0$ $\quad$ $\cos^2 x \geq 0$

$\sin^2 x \leq 1$ $\quad$ $\cos x \geq 0$

$\sin x \leq 1$ $\quad$ $x \geq 0$

$x \leq \pi n + 2\pi n, \ n \in Z$



$1-\sin^2 x = \cos^2 x$

№12

а) $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\quad$ $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ –

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ $\quad$ $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\sqrt{1-\sin}}$

$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

1) Условия:

$\sin^2 x \leq 1$

$\sin x \leq \pm 1$ $\quad$ $x \leq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z$

№12

а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{|\cos x|} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\begin{cases} \cos x > 0 \\ 4^{\cos x} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -\cos x \geq 0 \\ 4^{-\cos x} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 2\pi n \\ \varnothing \end{cases}$ $\quad$ $\cos x \leq 0$, $\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n$

Оценка эксперта:

0 баллов

Задание 12

№12 $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{|\cos x|} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

при $\cos x \geq 0$.

$x \in \varnothing$

при $\cos x \leq 0$

$4^{\cos x} = t$

$\frac{1}{t} - t = \frac{3}{2}$

$2t^2 + 3t - 2 = 0$

$(t+2)(2t-1) = 0$

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z \end{array}\right.$$

$2 \cdot 4^{2\sqrt{1-\sin^2 x}} - 2 = 3 \cdot 4^{\sqrt{1-\sin^2 x}}$

Пусть $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} = t$, тогда

$2t^2 - 3t - 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right.$

Оценка эксперта:

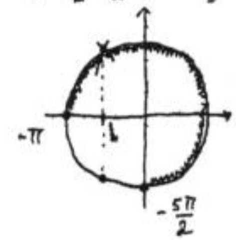
0 баллов.

Задание 12

№12

а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$



$4^{\sqrt{\cos^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{|\cos x|} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\cancel{0 = \frac{3}{2}}$ $\qquad 4^{\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

~~корней нет~~ $0 = \frac{3}{2}$, неподходит

~~б) решений нет.~~

$x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

$x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

$4^{-\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4}^{\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

пусть $4^{\cos x} = t$, $\cancel{t \geq 0}$ $t > 0$

$\frac{1}{t} - t - 1{,}5^{t} = 0$

$\frac{1 - t^2 - 1{,}5t}{t}$

$t^2 + 1{,}5t - 1 = 0$

$t_1 = \frac{-1{,}5 + \sqrt{6{,}25}}{2} = 0{,}5$

$t_2 = \frac{-1{,}5 - \sqrt{6{,}25}}{2} = -2$, неподходит по условию

обратная замена

$4^{\cos x} = 0{,}5$

$x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Ответ: а) } x = -\frac{1}{2} \quad \text{б) } \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z,\ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z}$

Оценка эксперта: 0 баллов

Задание 12

12. $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$1-\sin^2 x \geq 0$

$\sin x \leq 1$

$4^{\sqrt{\cos^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

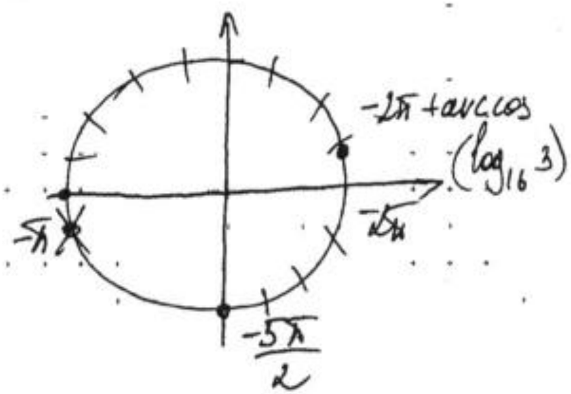
$4^{|\cos^2 x|} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{|\cos x|} = t$

$|t| - t = \frac{3}{2}$

$t - t = \frac{3}{2}$ $\quad$ $-t - t = \frac{3}{2}$

$\varnothing$ $\quad$ $t = \frac{3}{4}$



$4^{|\cos x|} = \frac{3}{4}$

$16^{\cos x} = 3$

$\cos x = \log_{16} 3$

$x = \pm \arccos(\log_{16} 3) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) $x = \pm \arccos(\log_{16} 3) + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

б) $-2\pi + \arccos(\log_{16} 3)$

Оценка эксперта: 0 баллов

Задание 12

№12.

а) $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

$1 - \sin^2 x \geqslant 0$

$\sin^2 x \leqslant 1$

$5^{\sqrt{\cos^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

1). $5^{\cos x} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

Нет решений.

2) $5^{-\cos x} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

$\frac{1}{5^{\cos x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

Пусть $5^{\cos x} = t$ $\quad t > 0$

$\frac{1}{t}^{(5} - t^{(5t} - \frac{24}{5}^{(t} = 0$

$\frac{5 - 5t^2 - 24t}{5t} = 0$

$5t + 24t - 5 = 0$

Оценка эксперта: 0 баллов

Задание 12

Оценка эксперта: 0 баллов

№12.

а) $5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = \frac{24}{5}$

$\cancel{5^{\cos x} - 5^{\cos x} = 5^{1} - 5^{-1}}$

$5^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 5^{\cos x} = 5^{1} - 5^{-1}$

$\sqrt{1-\sin^2 x} = 1$ и $\cos x = -1$

$1 - \sin^2 x = 1$ $\quad$ $x = \pi + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

$-\sin^2 x = 0$

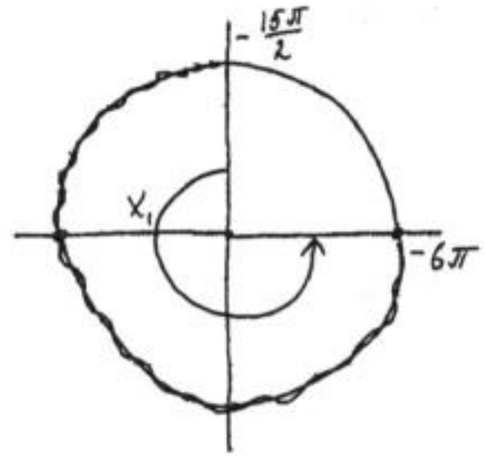
$-x = \pi + 2\pi k$

$x = -\pi - 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $x = \pi + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$

б) $x_1 = -7\pi$.

б) Отберём корни уравнения на промежутке $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$



$x_1 = -\frac{14\pi}{2} = -7\pi.$

Задание 12

Оценка эксперта: 0 баллов

№12

а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$; $\left(4^{\sqrt{\cos^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}\right)$.

$\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\frac{4^{\sqrt{1}}}{4^{\sqrt{\sin^2 x}}} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0$

$\frac{4^{1}}{4^{\sin x}} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0$; $4^{1-\sin x} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0$;

$4^{\cos^2 x} - 4^{\cos x} - \frac{3}{2} = 0$

$4^{\cos x} = t$

$t^2 - t - \frac{3}{2} = 0 \ \Big|\cdot 2$

$2t^2 - 2t - 3 = 0$

$D = 4 - 8(-3) = 28$

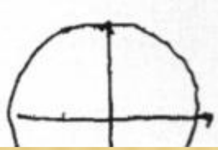
$t = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4}$; $t_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{7}$

$t_2 = \frac{1}{2} - \sqrt{7}$.

$4^{\cos x} = \frac{1}{2} + \sqrt{7}$; $4^{\cos x} = \frac{1}{2} - \sqrt{7}$.

$4^{\cos x} - \sqrt{7} = \frac{1}{2}$; $4^{\cos x} + \sqrt{7} = \frac{1}{2}$.

$-\pi$



Задание 12

Оценка эксперта: 2 балла

(12) а) $4^{\sqrt{1-\sin^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

Ограничения:

$1-\sin^2 x \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$\sin^2 x - 1 \leq 0$

Замена: $\sin x = t$

$t^2 - 1 \leq 0$

$(t-1)(t+1) \leq 0$

Метод интервалов:

$t \in [-1;1]$

Обр. замена:

$\sin x \in [-1;1]$

Это верно при любых x =>

=> ограничений нет

$4^{\sqrt{\cos^2 x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$4^{|\cos x|} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

Раскроем модуль по определению в 2 случаях:

I. если $\cos x \geq 0$, то $|\cos x| = \cos x$

$4^{\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$0 = \frac{3}{2}$

$\varnothing$

II. если $\cos x < 0$, то $|\cos x| = -\cos x$

$4^{-\cos x} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4^{\cos x}} - 4^{\cos x} = \frac{3}{2}$

Замена: $4^{\cos x} = t$, $t > 0$ (*)

$\frac{1}{t} - t = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{t}^{(2} - \frac{t}{1}^{(2t} - \frac{3}{2}^{(t} = 0$

$\frac{2-2t^2-3t}{2t} = 0$ ← по усл. (*) $t>0 \Downarrow 2t>0$

$2-2t^2-3t=0$

$2t^2+3t-2=0$

$D = 9-4\cdot 2\cdot(-2) = 9+16 = 25$

$t_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ – не подх. по усл. (*)

$t = \frac{1}{2}$

Обр. замена.

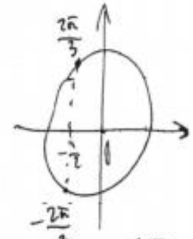
$4^{\cos x} = \frac{1}{2}$

$2^{2\cos x} = 2^{-1}$

$2\cos x = -1$

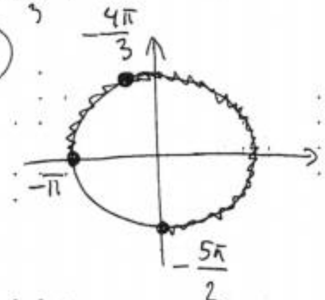
$\cos x = -\frac{1}{2}$

Это удовлетворяет усл. при раскрытии модуля: $\cos x < 0$



$\left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б)



$-\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{4\pi}{3}$

$-\frac{4\pi}{3} \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{4\pi}{3}$.

Задание 13 (ранее задание 14). Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

Задание 14.

ЕГЭ 2017	Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 4$. Основанием высоты пирамиды является центр прямоугольника. Из вершин A и C опущены перпендикуляры AP и CQ на ребро SB. а) Докажите, что P – середина отрезка BQ. б) Найдите угол между гранями SBA и SBC, если $SD = 4$.	2,1%
21.12.17 ТДТ	В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$, причём $AB = BD$. Точки M и N – середины рёбер B_1C_1 и AB соответственно. а) Докажите, что сечение призмы плоскостью MND_1 – многоугольник с прямым углом при вершине D_1. б) Найдите площадь указанного сечения, если $AB = 4$ и $AA_1 = 3\sqrt{2}$.	1,9%
ЕГЭ 2018	В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности одного из оснований цилиндра выбраны точки A и B, а на окружности другого основания – точки B_1 и C_1, причём BB_1 - образующая цилиндра, а отрезок AC_1 пересекает ось цилиндра. а) Докажите, что угол ABC_1 прямой. б) Найдите объём цилиндра, если $AB = 6, BB_1 = 8, B_1C_1 = 15$.	12,9%
20.12.18 ТДТ	Точка M – середина ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. а) Докажите, что плоскость AMB_1 параллельна прямой A_1C. б) Найдите расстояние между прямой A_1C и плоскостью AMB_1, если параллелепипед прямоугольный, $AB = 4$, $AD = 6$ и $AA_1 = 3$.	3,4%
29.05.19 ЕГЭ	В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC. а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA. б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.	10,7%

Задание 14.

10.12.19 ТДТ	В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L — середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L. а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ. б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.	1,9%
10.07.20 ЕГЭ	В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $4\sqrt{3}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=5$, $SK:KB=4:3$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K. а) Докажите, что плоскость α содержит точку C. б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α.	1,4%
28.01.21 ТДТ	В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина стороны основания AB равна 6, а длина бокового ребра SA равна $\sqrt{21}$. На ребре AB отмечена точка M так, что $AM=4$. На ребре SB отмечена точка K, причём $SK:KB=1:3$. а) Докажите, что плоскости CKM и ABC перпендикулярны. б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.	2,4%
07.06.21 ЕГЭ	В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K — середина бокового ребра SD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P. а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD. б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.	13,5%

Задание 13 (ранее задание 14)

Все рёбра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы AA_1B_1 и AA_1C_1 равны $60°$. Площадь грани AA_1B_1B равна $10\sqrt{3}$. а) Докажите, что четырёхугольник BCC_1B_1 является квадратом. б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ABC_1.	б) $\sqrt{10}$.
Все рёбра призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны между собой. Углы AA_1B_1 и AA_1C_1 равны $60°$. Площадь грани AA_1B_1B равна $6\sqrt{3}$. а) Докажите, что четырёхугольник BCC_1B_1 является квадратом. б) Найдите расстояние от точки C до плоскости ABC_1.	б) $\sqrt{6}$.

Баллы	Количество участников	Процент
0	1647	98,03%
1	26	1,55%
2	3	0,18%
3	4	0,24%

Задание 13.

В правильной треугольной пирамиде $SABC$ длина стороны основания AB равна 6, а длина бокового ребра SA равна $\sqrt{21}$. На ребре AB отмечена точка M так, что $AM = 4$. На ребре SB отмечена точка K, причём $SK : KB = 1:3$.

а) Докажите, что плоскости CKM и ABC перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

Решение.

а) Пусть точка N — середина ребра AC, а прямые BN и CM пересекаются в точке H (рис. 1).

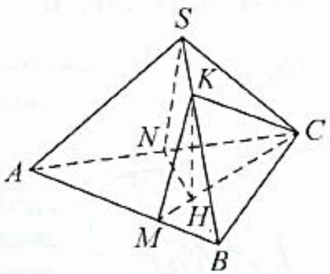


Рис. 1

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 2). Пусть L — такая точка на отрезке AM, что прямые LN и CM параллельны. Тогда отрезок LN — средняя линия треугольника ACM, следовательно,

$$AL = LM = \frac{AM}{2} = 2.$$

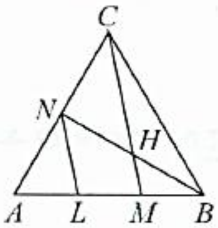


Рис. 2

Получаем:

$$\frac{NH}{BH} = \frac{LM}{BM} = 1;\ BH = \frac{BN}{2}.$$

Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, тогда, поскольку пирамида $SABC$ правильная, точка пересечения медиан треугольника ABC совпадает с точкой O. Значит, прямая SO лежит в плоскости SBN.

В треугольнике SOB (рис. 3) имеем:

$$\frac{BH}{OB} = \frac{BH}{\frac{2}{3}BN} = \frac{3}{2} \cdot \frac{BH}{BN} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} = \frac{KB}{SB}.$$

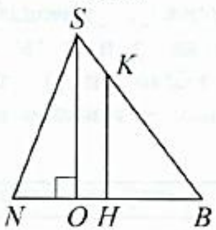


Рис. 3

Следовательно, прямые KH и SO параллельны. Получаем, что прямая KH перпендикулярна плоскости ABC. Значит, содержащая прямую KH плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.

б) Пусть h — высота пирамиды $BCKM$, проведённая из вершины K. В треугольнике SOB имеем:

$$OB = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3};\ SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{21 - 12} = 3;$$

$$h = \frac{KB}{SB} \cdot SO = \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}.$$

Площадь треугольника BCM равна

$$S_{BCM} = \frac{MB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ}{2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}.$$

Объём пирамиды $BCKM$ равен

$$\frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{BCM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Задание 14 (ранее задание 13) Содержание критерия

ЕГЭ–2017-2022	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением определенной точки ИЛИ получен неверный ответ из-за **вычислительной** ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание 14 (ранее задание 15)

ЕГЭ 2017	Решите неравенство $\frac{log_6(36x)-1}{log_6^2 x - log_6 x^3} \geq -1$.	14,0%
21.12.17 ТДТ	Решите неравенство $log_{8x}16 \cdot log_{0,5}^2(4x) \leq 9$.	1,8%
ЕГЭ 2018	Решите неравенство $2\log_7(x\sqrt{2}) - \log_7\left(\frac{x}{1-x}\right) \leq \log_7\left(8x^2 + \frac{1}{x} - 5\right)$.	10,1%
20.12.18 ТДТ	Решите неравенство $\log_5(x^2-4) \leq 3 \cdot \log_5 \frac{x+2}{x-2}$.	3,3%
29.05.19 ЕГЭ	Решите неравенство $\log_3(9-9x) > \log_3(x^2-3x+2) + \log_3(x+4)$.	21,7%
10.12.19 ТДТ	Решите неравенство $\frac{9^x - 25 \cdot 3^x + 26}{3^x - 1} + \frac{9^x - 7 \cdot 3^x + 1}{3^x - 7} \leq 2 \cdot 3^x - 24$.	9,05%
10.07.20 ЕГЭ	Решите неравенство $x^2 \log_{343}(x+3) \leq \log_7(x^2+6x+9)$.	15,3%
28.01.21 ТДТ	Решите неравенство $\log_3(9-9x) - \log_3(x+4) > \log_3(x^2-3x+2)$.	10,1%
07.06.21 ЕГЭ	Решите неравенство $(4^x - 3 \cdot 2^x)^2 - 38(4^x - 3 \cdot 2^x) - 80 \leq 0$.	23,0%

Вторая задача, являющаяся резервом для повышения результативности выполнения заданий ЕГЭ – задача **С14 (ранее задание 15)**, связанная с решением показательного или логарифмического неравенства.

15 Решите неравенство $\left(4^x-3\cdot 2^x\right)^2-38\left(4^x-3\cdot 2^x\right)-80\le 0.$

Группы участников	Количество		0 баллов		1 балл		2 балла	
	2020	2021	2020	2021	2020	2021	2020	2021
61-80	1071 (34%)	944 (36%)	756 (71%)	605 (64%)	13 (1%)	16 (1,7%)	302 (28%)	323 (34%)
81-100	176 (5,7%)	252 (9,6%)	23	12	4	8	149 (85%)	232 (92%)

Задание 14 (ранее задание 15)

15. $\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geqslant -1$ ОДЗ: $\left.\begin{matrix}36x>0\\ x>0\\ x^3>0\end{matrix}\right| \Rightarrow x>0$

Неверно

$\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geqslant -1$ О.Д.З. $\begin{cases}36x>0,\\ x>0,\\ x^3>0.\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\\ x>0,\\ x>0.\end{cases}$

$\dfrac{\log_6 36+\log_6 x-1}{\log_6^2 x-3\log_6 x}+1\geqslant 0$ $x\in(0;+\infty)$.

Неверно

N15. $\dfrac{\log_2(32x)-1}{\log_2^2 x-\log_2 x^5}\geqslant -1$ ОДЗ: $x>0$

$x\neq 0$

Неверно

Верно

15. $\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geqslant -1$ $x>0$

$\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geqslant -1$ ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x\neq 6^3\end{cases}$

$\dfrac{1+\log_6 x+\log_6 x(\log_6 x-3)}{\log_6 x(\log_6 x-3)}\geqslant 0$

$\dfrac{\log_6^2 x-2\log_6 x+1}{\log_6 x(\log_6 x-3)}\geqslant 0$

Верно

N15 $\dfrac{\log_6(36x)-1}{\log_6^2 x-\log_6 x^3}\geqslant -1$

ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ \log_6^2 x-3\log_6 x\neq 0\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\ \log_6 x\neq 0\\ \log_6 x\neq 3\end{cases}$

$\begin{cases}x>0\\ \log_6 x\neq\log_6 1\\ \log_6 x\neq\log_6 216\end{cases}$ $\begin{cases}x>0\\ x\neq 1\\ x\neq 216\end{cases}$

Верно

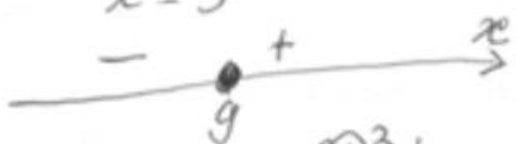
Задание 14 (ранее задание 15)

$\log_3 x - 2 \le 0$

ОДЗ: $x > 0$.

$\log_3 x - 2 = 0$

$x = 9$



с учетом ОДЗ:

$x \in (0; 9]$

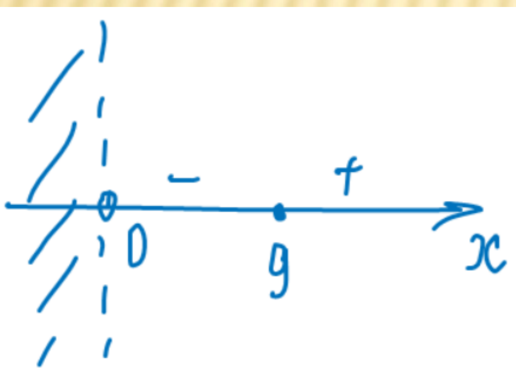
Ответ: $(0; 9]$

Метод интервалов.

1. Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$. Рассмотреть функцию $f(x)$.
2. Найти область определения функции $f(x)$.
3. Найти нули функции $f(x)$, решив уравнение $f(x) = 0$.
4. Отметить на числовой прямой область определения и нули функции $f(x)$.
5. Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
6. Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (обратив внимание на нули функции).

Неверно

Неравенство решено?



Верно

Задание 14 (ранее задание 15)

$$\log_3 x \le 2$$

$$x \le 9$$

Неверно

с учетом ОДЗ

$$0 < x \le 9$$

$$\log_3 x \le 2$$

$$0 < x \le 9$$

Верно

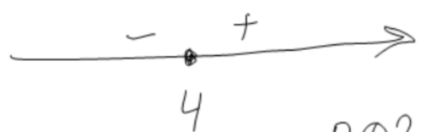
Задание 14

$\log_2 x - 2 \le 0$

ОДЗ: $x > 0$

$\log_2 x - \log_2 4 \le 0$

$(2-1)(x-4) \le 0$



с учетом ОДЗ:

$x \in (0; 4]$

Ответ: $(0; 4]$

Метод интервалов.

1. Привести неравенство к виду $f(x) \vee 0$. Рассмотреть функцию $f(x)$.
2. Найти область определения функции $f(x)$.
3. Найти нули функции $f(x)$, решив уравнение $f(x) = 0$.
4. Отметить на числовой прямой область определения и нули функции $f(x)$.
5. Определить знаки функции на промежутках, входящих в область определения функции.
6. Записать ответ, включив в него промежутки в соответствии со знаком неравенства (обратив внимание на нули функции).

Неравенство решено?

Задание 14 (ранее задание 15)

ФИПИ

Задание 15. Пример 4. Работа 2

Решите неравенство $x^2\log_{625}(2-x)\ge\log_5\left(x^2-4x+4\right)$.

Ответ: $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]$; $[1;2)$.

№15

$x^2\log_{625}(2-x)\geqslant\log_5(x^2-4x+4)$

$\frac{1}{4}x^2\log_5(2-x)-\log_5(x^2-4x+4)\geqslant 0$

$\frac{x^2}{4}\log_5(2-x)-\log_5(x-2)^2\geqslant 0$

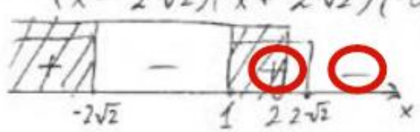
$\frac{x^2}{4}\log_5(2-x)-\log_5(2-x)^2\geqslant 0$

$\frac{x^2}{4}\log_5(2-x)-2\log_5(2-x)\geqslant 0$

$\left(\frac{x^2}{4}-2\right)(\log_5(2-x))\geqslant 0$

$(x^2-8)(\log_5(2-x))\geqslant 0$

$(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(\log_5(2-x))\geqslant 0$



Ответ: $(-\infty;-2\sqrt{2}]\cup[1,2]$.

О.Д.З.:

1) $2-x>0$

$x<2$

2) $(x-2)^2>0$

верно всегда

0 баллов

© Вс...

19 Оценивание

Задание 14 (ранее задание 15)

ФИПИ

Задание 15. Пример 4. Работа 4

Решите неравенство $x^2 \log_{625}(2-x) \geq \log_5(x^2-4x+4)$.

Ответ: $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right]$; $[1; 2)$.

№ 15.

$x^2 \log_{625}(2-x) \geq \log_5(x^2-4x+4)$

$\frac{1}{4} x^2 \log_5(2-x) \geq \log_5(2-x)^2$

$\frac{1}{4} x^2 \log_5(2-x) \geq 2 \log_5(2-x)$

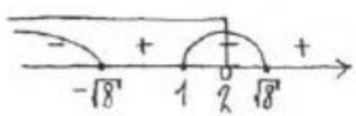
$x^2 \log_5(2-x) - 8 \log_5(2-x) \geq 0$

$\log_5(2-x) \cdot (x^2-8) \geq 0$

$\log_5(2-x) \cdot (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) \geq 0$

$$\begin{cases}(2-x-1)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) \geq 0 \\ 2-x > 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-1)(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) \leq 0 \\ x < 2\end{cases}$$



$x \in (-\infty; -\sqrt{8}] \cup [1, 2)$

Ответ. $x \in (-\infty, -\sqrt{8}] \cup [1, 2)$.

2 балла

Задание 14 (ранее задание 15)

15) $x^2 \log_{243}(x+4) \le \log_3(x^2+8x+16)$

ОДЗ: $\begin{cases} x+4>0 \\ x^2+8x+16>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ (x+4)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-4 \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow x>-4$

$x^2 \cdot \log_{3^5}(x+4) \le \log_3((x+4)^2)$

$\frac{x^2}{5} \cdot \log_3(x+4) - 2\log_3(x+4) \le 0$

$\left(\frac{x^2}{5} - 2\right) \cdot \log_3(x+4) \le 0$

Введём функцию $f(x) = \left(\frac{x^2}{5} - 2\right) \cdot \log_3(x+4)$,

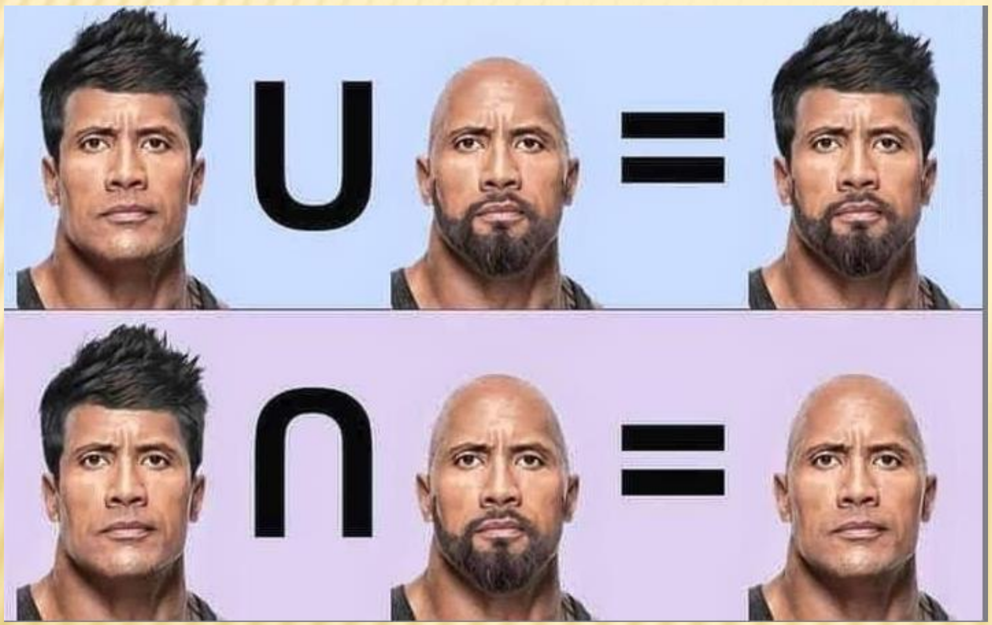
решим $f(x) \le 0$

Нули ф-ии: $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{5} - 2 = 0 \\ \log_3(x+4) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 10 \\ x+4 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

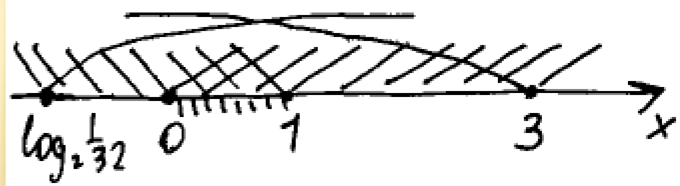
$\frac{2t^2-4t+2}{(t-4)(t-5)} \le 0$. $\frac{2(t-1)^2}{(t-4)(t-5)} \le 0$. $4<t<5$, тогда.

$\begin{matrix} 5^x=1 \\ 5^x>4 \\ 5^x<5 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0; \\ x>\log_5 4; \\ x<1 \end{cases}$

Ответ: $x=0$; $x \in (\log_5 4; 1)$.



$\begin{cases} 2^x \ge -5 \\ 2^x \le 8 \\ 2^x \ge 2 \\ 2^x \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ge \log_2 \frac{1}{32} \\ x \le 3 \\ x \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$



$x \in [0; 1]$

Обратная замена:

$\begin{cases} 2^x \geqslant -3 \text{ — нет решения} \\ 2^x \le 8 \end{cases}$

$3^x \geqslant -5$ $\varnothing$

$2^x \ge -5$

нет решений, т.к. после возведения в степени число будет положит.

Задание 14

Решите неравенство $$\frac{3^{\sqrt{x+5}}\cdot\log_4(x+3)-27\cdot\log_4(x+3)+3^{\sqrt{x+5}}-27}{x^2-8x+16}>0.$$	$\left(-3;-\frac{11}{4}\right);\ (4;+\infty).$
Решите неравенство $$\frac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0.$$	$\left(-3;-\frac{8}{3}\right);\ (6;+\infty).$

Баллы	Количество участников	Процент
0	1543	91,8%
1	16	0,9% (1,0% - ЕГЭ 2021)
2	121	7,2% (22,0% - ЕГЭ 2021)

Задание 14. Вариант 1

Решите неравенство

$$\frac{3^{\sqrt{x+5}}\cdot\log_4(x+3)-27\cdot\log_4(x+3)+3^{\sqrt{x+5}}-27}{x^2-8x+16}>0.$$

$$\left(-3;-\frac{11}{4}\right);\ (4;+\infty).$$

Решите неравенство

$$\frac{3^{\sqrt{x+5}}\cdot\log_4(x+3)-27\cdot\log_4(x+3)+3^{\sqrt{x+5}}-27}{x^2-8x+16}>0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left(\log_4(x+3)+1\right)\left(3^{\sqrt{x+5}}-27\right)}{(x-4)^2}>0.$$

При условии $x\neq 4$ получаем неравенство

$$\left(\log_4(x+3)+1\right)\cdot\left(3^{\sqrt{x+5}}-27\right)>0.$$

Выражение $\log_4(x+3)+1$ принимает положительные значения при $x>-\frac{11}{4}$ и отрицательные — при $-3<x<-\frac{11}{4}$.

Выражение $3^{\sqrt{x+5}}-3^3$ принимает положительные значения при $x>4$ и отрицательные — при $-5\le x<4$.

Выражения $\log_4(x+3)+1$ и $3^{\sqrt{x+5}}-3^3$ принимают значения одного знака при $-3<x<-\frac{11}{4}$ или $x>4$.

Ответ: $\left(-3;-\frac{11}{4}\right);\ (4;+\infty).$

Задание 14

Оценка эксперта:

0 баллов

№14. $\dfrac{4^{\sqrt{x+3}}\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>$

$\dfrac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{(x-6)^2}>0 \quad \backslash\cdot(x-6)^2\neq0$

$\begin{cases}(x-6)^2\neq0\\ x+3>0\end{cases} \qquad \begin{cases}x\neq6\\ x>-3\end{cases}$

$4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}*-64>0$, т.к. $64=4^3\Rightarrow$

$4^{\sqrt{x+3}}(\log_3(x+3)+1)-4^3(\log_3(x+3)+1)>0$

$\dfrac{(\log_3(x+3)+1)(4^{\sqrt{x+3}}-64)}{(x-6)^2}>0$

$\log_3(x+3)+1>0$

$\log_3(x+3)+\log_3 3>0$

$4^{\sqrt{x+3}}-64>0$

$4^{\sqrt{x+3}}>64$

$\dfrac{(\log_3(x+3)+1)(4^{\sqrt{x+3}}-64)}{x^2-12x+36}>0$

$\log_3(x+3)+1>0 \qquad 4^{\sqrt{x+3}}-64>0 \qquad x^2-12x+36>0$

14) $\dfrac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$

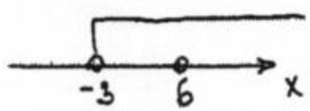
$x+3\neq0$ ОДЗ: $x+3>0$ $\qquad x^2-12x+36\neq0$

$x\neq-3$ $\qquad x>-3$ $\qquad x_1+x_2=12$

$x_1\cdot x_2=36$

$x_1=x_2=6$

$x\neq6$



$x\in(-3;6)\cup(6;+\infty)$

$\log_3(x+3)\cdot(4^{\sqrt{x+3}}-64)+4^{\sqrt{x+3}}-64>0$ $\qquad x^2-12x+36\neq0$

$(4^{\sqrt{x+3}}-64)(\log_3(x+3)+\cancel{64}^{\,1})>0$ $\qquad (x-6)^2\neq0$

$x\neq6$

$4^{\sqrt{x+3}}-64>0$ и $\log_3(x+3)+1>0$

Задание 14

Оценка эксперта:

0 баллов

№14

$$\frac{4^{\sqrt{x+3}}\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$$

$$\boxed{\text{ОДЗ: } \begin{array}{l} x+3>0 \\ x>-3 \end{array}}$$

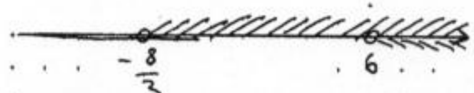
$$\left[\begin{array}{l} 4^{\sqrt{x+3}}\log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64>0 \\ x^2-12x+36>0 \end{array}\right.$$

$$4^{\sqrt{x+3}}\left(\log_3(x+3)+1\right)-64\left(\log_3(x+3)+1\right)>0$$

$$\left(4^{\sqrt{x+3}}-64\right)\left(\log_3(x+3)+1\right)>0$$

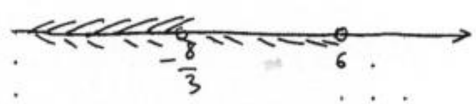
$$\begin{cases} 4^{\sqrt{x+3}}-64>0 \\ \log_3(x+3)+1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{\sqrt{x+3}}>4^3 \\ \log_3(x+3)>\log_3\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}>3 \\ x+3>\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3>9 \\ x>-\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>6 \\ x>-\frac{8}{3} \end{cases}$$



$x>6$

$$\begin{cases} 4^{\sqrt{x+3}}-64\ \cancel{>0}<0 \\ \log_3(x+3)\ \cancel{>}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^{\sqrt{x+3}}<4^3 \\ \log_3(x+3)<\log_3\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}<3 \\ x+3<\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<6 \\ x<-\frac{8}{3} \end{cases}$$



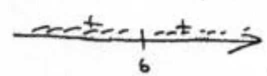
$x<-\frac{8}{3}$

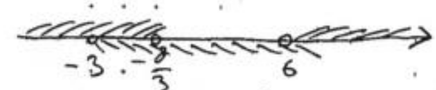
$x^2-12x+36>0$

$D=0$

$x=\frac{12}{2}=6 \qquad x\in R$

$x\notin 6$





Ответ: $\left(-3;-\frac{8}{3}\right)\cup(6;+\infty)$

Задание 14

№ 14

$$\frac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$$

условие:

$x+3>0$

$x>-3$

$(x-6)^2\neq 0$

$x\neq\pm 6$

$$\frac{4^{\sqrt{x+3}}(\log_3(x+3)+1)-64(\log_3(x+3)+1)}{(x-6)^2}>0$$

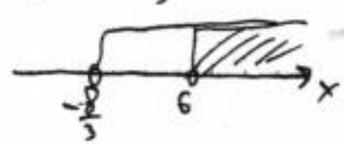
$$\frac{(4^{\sqrt{x+3}}-64)\cdot(\log_3(x+3)+1)}{(x-6)^2}>0$$

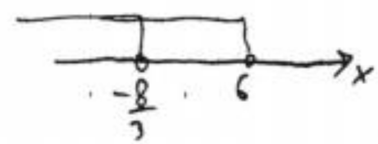
т.к. знаменатель всегда положителен, определим, когда числитель >0

$$\begin{cases}4^{\sqrt{x+3}}-64>0\\ \log_3(x+3)+1>0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}4^{\sqrt{x+3}}-64<0\\ \log_3(x+3)+1<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}4^{\sqrt{x+3}}>4^3\\ \log_3(x+3)>-\log_3 3\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}4^{\sqrt{x+3}}<4^3\\ \log_3(x+3)<-\log_3 3\end{cases}$$

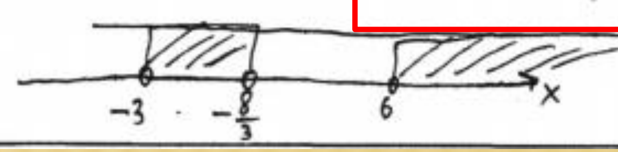
$$\begin{cases}x>6\\ x>-\frac{8}{3}\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x<6\\ x<-\frac{8}{3}\end{cases}$$





$x\in(6;+\infty)$ $\qquad\qquad$ $x\in(-\infty;-\frac{8}{3})$

$x\in(-3;-\frac{8}{3});(6+\infty)$



Ответ: $(-3;-\frac{8}{3});(6;+\infty)$

Оценка эксперта:
0 баллов.

Задание 14

№14. $\dfrac{4^{\sqrt{x+3}}\log_3(x+3)-64\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0.$

$\sqrt{x+3}=t \quad t\geq 0.$ Усл. $x\neq 6 \quad x>-3.$

$\underbrace{(4^t-4^3)}_{f(x)}\underbrace{(\log_3 t^2+1)}_{g(x)}>0$

I $\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \end{cases}$ II $\begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)<0 \end{cases}$

I $\begin{cases} 4^t>4^3 \\ \log_3 t^2>-1 \end{cases}$ $t\in(3;+\infty) \Rightarrow x\in(6;+\infty)$

II $\begin{cases} 4^t<4^3 \\ \log_3 t^2<-1 \end{cases}$ $t\in\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x\in\left(-3;-\frac{8}{3}\right)$

Ответ: $x\in\left(-3;-\frac{8}{3}\right)\cup(6;+\infty).$

Оценка эксперта:
0 баллов.

14. $$\frac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot \log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$$

$$\begin{cases} x+3>0 \\ x^2-12x+36\neq 0\ (1)\end{cases} \quad \begin{cases} x>-3 \\ x\neq 6\end{cases}$$

(1) $x^2-12x+36\neq 0$

$D=144-144=0$

$x_1\neq\frac{12}{2}\neq 6$

$$\frac{4^{\sqrt{x+3}}\cdot \log_3(x+3)-64\cdot\log_3(x+3)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$$

$4^{\sqrt{x+3}}\cdot\log_3(x+3)-64\ \log_3(x+8)+4^{\sqrt{x+3}}-64=0$

$\log_3(x+3)(4^{\sqrt{x+3}}-64)+(4^{\sqrt{x+3}}-64)=0$

$(4^{\sqrt{x+3}}-64)(\log_3(x+3)+1)=0$

$4^{\sqrt{x+3}}-64=0$ или $\log_3(x+3)+1=0$

$4^{\sqrt{x+3}}=64$ $\qquad \log_3(x+3)=-1$

$4^{\sqrt{x+3}}=4^3$ $\qquad 3^{-1}=x+3$

$\sqrt{x+3}=3$ $\qquad \frac{1}{3}=x+3$

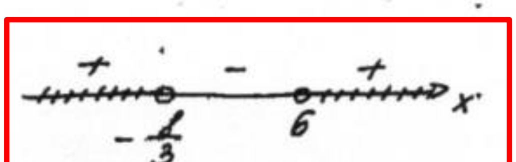
$x+3=9$

$x=6$

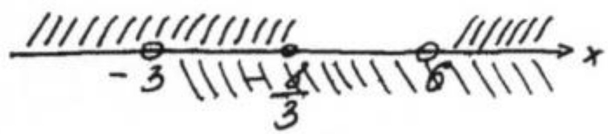
$3x+9=1$

$3x=-8$

$x=-\frac{8}{3}$



С учетом ограничений.



$x\in(-3;-\frac{8}{3})\cup(6;+\infty)$

Ответ. $(-3;-\frac{8}{3})\cup(6;+\infty)$

Оценка эксперта:
0 баллов

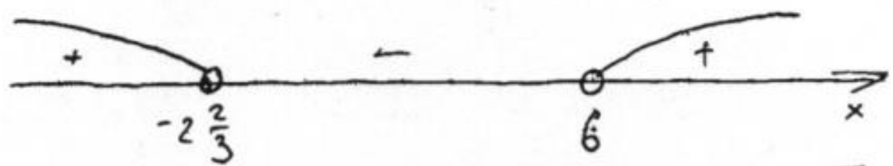
$$\frac{(4^{\sqrt{x+3}}-64)(\log_3(x+3)+1)}{(x-6)^2}>0$$

$4^{\sqrt{x+3}}-64=0$ $\qquad$ $\log_3(x+3)+1=0$ $\qquad$ $(x-6)^2\neq 0$

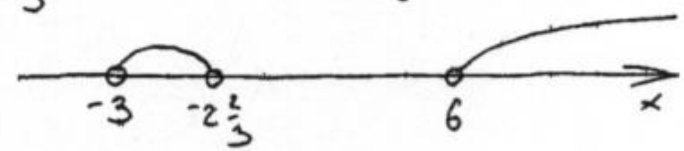
$4^{\sqrt{x+3}}=4^3$ $\qquad$ $\log_3(x+3)=\log_3\frac{1}{3}$ $\qquad$ $x\neq 6$

$\sqrt{x+3}=3$ $\qquad$ $x+3=\frac{1}{3}$

$x=6$ $\qquad$ $x=-2\frac{2}{3}$



О.Д.З.



Ответ $x\in(-3;-2\frac{2}{3})\cup(6,+\infty)$.

$$\frac{(\log_3(x+3)+1)(4^{\sqrt{x+3}}-64)}{(x-6)^2}>0$$

$x\in(-\infty;-2\frac{2}{3})\cup(6;+\infty)$

Согласую с ограничениями:

$x\in(-3;-2\frac{2}{3})\cup(6,+\infty)$

Ответ $(-3;-2\frac{2}{3})\cup(6,+\infty)$

Оценка эксперта:
0 баллов

14. $$\frac{\log_3(x+3)\left(4^{\sqrt{x+3}}-64\right)+4^{\sqrt{x+3}}-64}{x^2-12x+36}>0$$

*) $x\neq 6$

$x>-3$.

$$\frac{\left(4^{\sqrt{x+3}}-64\right)\left(\log_3(x+3)+1\right)}{(x-6)^2}>0$$

I $4^{\sqrt{x+3}}-64=0$.

$4^{\sqrt{x+3}}=64=4^3$

$\sqrt{x+3}=3$.

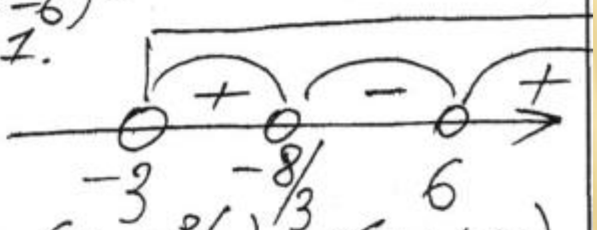
$\begin{cases} x>-3 \\ x+3=9 \end{cases}$

$x=6$.

II $\log_3(x+3)=-1$.

$\frac{1}{3}=x+3$

$x=-\frac{8}{3}$.



Ответ: $x\in(-3;-8/3)\cup(6;+\infty)$.

Оценка эксперта:
2 балла

Задание 15 (ранее задание 17). Содержание критерия

ЕГЭ–2017-2021	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Задание 15 (ранее задание 17)

ЕГЭ 2017	В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: - каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года; - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Сколько рублей будет выплачено банку, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 48250 рублей больше суммы, взятой в кредит?	16,5%
21.12.17 ТДТ	В июле планируется взять кредит на сумму 2013000 рублей. Условия его возврата таковы: - каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?	8,8%
ЕГЭ 2018	15-го декабря планируется взять кредит в банке на 31 месяц. Условия его возврата таковы: - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца; - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; - 15-го числа каждого месяца с 1-го по 30-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; - 15-го числа 30-го месяца долг составит 100 тысяч рублей; - к 15-му числу 31-го месяца кредит должен быть полностью погашен. Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного погашения составит 555 тысяч рублей?	3,6%
20.12.18 ТДТ	По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает первоначальное вложение 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 11% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальное вложение за два года вырастет как минимум в полтора раза, и наименьшее значение m такое, что при найденном ранее значении n первоначальное вложение за четыре года как минимум удвоится.	4,9%

Задание 15 (ранее задание 17)

29.05.19 ЕГЭ 2019	15-го января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы: — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 2 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)	16,2%
10.12.19 ТДТ	В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга. Если ежегодно выплачивать по 75 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 123 000 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.	6,8%
10.07.20 ЕГЭ	В июле 2026 года Иванов планирует взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; — в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей; — выплаты в 2030 и 2031 годах равны; — к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью. Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.	11,5%

Задание 15 (ранее задание 17)

2021 ТДТ	В июле планируется взять кредит в банке на сумму 14 млн рублей на 14 лет. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. Найдите процентную ставку r, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит 2,4 млн рублей, а наименьший — не менее 1,1 млн рублей.	9,1%
2021 ЕГЭ	В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 600 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы: — в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года; — в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года; — к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 984 тысячи рублей. Найдите r.	19,2%

Ещё одна задача, являющаяся резервом для повышения результативности выполнения заданий ЕГЭ – задача **С15 (ранее задание 17)**, связанная с решением текстовой задачи экономического содержания.

Группы участников	Количество		0 баллов		1 балл		2 балла		3 балла	
	2020	2021	2020	2021	2020	2021	2020	2021	2020	2021
61-80	1071 (34%)	944 (36%)	870 (81%)	696 (74%)	141 (13%)	20 (2%)	11 (1%)	24 (2,5%)	49 (4,5%)	204 (22%)
81-100	176 (5,7%)	252 (9,6%)	27	2	33	1	9	14	107 (61%)	235 (93%)

17 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 600 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:

— в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 984 тысячи рублей. Найдите r.

№ 17.

S - нач. сумма; k - 1,2,3 коэффициент; p - 4,5,6 коэффициент; x - выплата 1,2,3; y - выплата 4,5

	начало года	выплата.	остаток
0			S
1	Sk	x	$Sk-x$
2	Sk^2-kx	x	Sk^2-kx-x
3	Sk^3-k^2x-kx	x	$Sk^3-k^2x-kx-x$
4	$Sk^3r-k^2rx-krx-xr$	y	$Sk^3r-k^2rx-krx-xr-y$
5	$Sk^3r^2-k^2r^2x-kr^2x-xr^2-yr$	y	$Sk^3r^2-k^2r^2x-kr^2x-xr^2-yr-y$
6	$Sk^3r^3-k^2r^3x-kr^3x-xr^3-yr^2-yr$	y	$Sk^3r^3-k^2r^3x-kr^3x-xr^3-yr^2-yr-y$

Задание 15 (ранее задание 17)

№ 17 Ответ:

S – сумма взятая в кредит (432 тыс. р.) S выплат – 924 тыс. р.

r – % $\quad n = 5$ лет

n	Долг	%	Выплата
1	S	$S\cdot r$	$S\cdot r$
2	S	$S\cdot r$	$S\cdot r$
3	S	$S\cdot r$	$S\cdot r$
4	S	$S\cdot r$	x
5	$(S + S\cdot r) - x$	$(S + S\cdot r - x)\cdot r$	x

$$\begin{cases} S + S\cdot r - x + (S + S\cdot r - x)r - x = 0 \\ 3S\cdot r + 2x = 924 \end{cases}$$

$1080k^2 - 462k - 1110 = 0 \;|:2 \qquad 540k^2 - 231k - 555 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 231^2 + 4\cdot 540\cdot 555 = 53361 + 1198800 =$

$= 1252161$

$\cancel{k_1 = \frac{462 + \sqrt{1252161}}{}}$ $\qquad k_1 = \frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080} \qquad k_2 = \frac{231 - \sqrt{1252161}}{1080} < 0$

$k = \frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080} \qquad 1 + \frac{r}{100} = \frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080}$

$\frac{r}{100} = \frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080} \qquad r = \frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080}\cdot 100$

Ответ: $\frac{231 + \sqrt{1252161}}{1080}\cdot 100\ \%$

Задание 15 (ранее задание 17)

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,8 млн рублей?	4
В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга; — в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 4,4 млн рублей?	8

Баллы	Количество участников	Процент
0	1580	94,0%
1	7	0,4%
2	93	5,6%

Задание 15. Вариант 1

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 8 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.
На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 2,8 млн рублей?

Решение.
Пусть кредит взят на n лет. По условию долг (в млн рублей) перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$8; \quad \frac{8(n-1)}{n}; \quad \ldots; \quad \frac{8}{n}; \quad 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 10%. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$8{,}8; \quad \frac{8{,}8(n-1)}{n}; \quad \ldots; \quad \frac{8{,}8}{n}.$$

Выплаты равны:

$$0{,}8+\frac{8}{n}; \quad 0{,}8+\frac{7{,}2}{n}; \quad \ldots; \quad \frac{8{,}8}{n}.$$

Наибольшая выплата составляет $0{,}8+\frac{8}{n}$. Получаем $0{,}8+\frac{8}{n} \le 2{,}8$, откуда $n \ge 4$.
Ответ: 4.

Задание 15. Вариант 2

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 4,4 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит взят на n лет. По условию долг (в млн рублей) перед банком по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$16;\quad \frac{16(n-1)}{n};\quad \ldots;\quad \frac{16}{n};\quad 0.$$

По условию каждый январь долг возрастает на 15%. Значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$18{,}4;\quad \frac{18{,}4(n-1)}{n};\quad \ldots;\quad \frac{18{,}4}{n}.$$

Выплаты равны:

$$2{,}4+\frac{16}{n};\quad 2.4+\frac{13{,}6}{n};\quad \ldots;\quad \frac{18{,}4}{n}.$$

Наибольшая выплата составляет $2{,}4+\frac{16}{n}$. Получаем $2{,}4+\frac{16}{n}\leq 4{,}4$, откуда $n\geq 8$.

Ответ: 8.

Задание 15

№15. Дано:

$S = 16$ млн. руб

$r = 15\%$

$x \le 4{,}4$ млн. руб

n – ?

Решение:

Проценты на кредит набегают до того, как была внесена 1 выплата.

Чем больше годовой платеж, тем минимальнее срок кредита $\Rightarrow$ за x_{max} возьмем 4,4 млн. руб.

Будем производить подсчеты в млн. руб., $\frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

1) $16 + 16 \cdot \frac{3}{20} - 4{,}4 = 16 + 2{,}4 - 4{,}4 = 14$

2) $14 - 4{,}4 + \frac{14 \cdot 3}{20} = 11{,}7$

3) $11{,}7 - 4{,}4 + \frac{11{,}7 \cdot 3}{20} = 9\frac{11}{200}$

4) $9\frac{11}{200} - \frac{4{,}4 \cdot 200}{200} + 9\frac{11}{200} \cdot \frac{3}{20} = \frac{1811 - 880}{200} + \frac{1811 \cdot 3}{4000} = \frac{951 \cdot 20 + 5433}{4000} = \frac{24453}{4000}$

5) $\frac{24453}{400} - \frac{17600}{4000} + \frac{24453}{4000} \cdot \frac{3}{20} = \frac{190319}{8000}$

4) $9\frac{11}{200} - \frac{4{,}4 \cdot 200}{200} + 9\frac{11}{200} \cdot \frac{3}{20} = \frac{2896}{200}$

5) $\frac{1448}{100} + \frac{1448 \cdot 3}{100 \cdot 20} - \frac{4{,}4 \cdot 100}{100} = \frac{12252}{1000}$

6) $\frac{12252 - 4400}{1000} + \frac{12252 \cdot 3}{1000 \cdot 20} = \frac{96898}{1000}$

7) $\frac{96898 - 4400}{10000} + \frac{48449 \cdot 3}{100000} = \frac{198245}{10000} < \frac{440000}{10000} \Rightarrow$

за 8 год мы полностью погасим кредит

Ответ: 8 лет

Оценка эксперта:

0 баллов.

Задание 15

Оценка эксперта:
0 баллов.

~~№14~~ №15

	Клиент		Банк	
	сумма кр	%	выплата %	выплата суммы
1-ый год	16	15	$0{,}15\cdot 16$	$\frac{16}{n}$

$$0{,}15\cdot 16+\frac{16}{n}\le 4{,}4$$

$$2{,}4+\frac{16}{n}\le 4{,}4$$

$$\frac{16}{n}\le 2$$

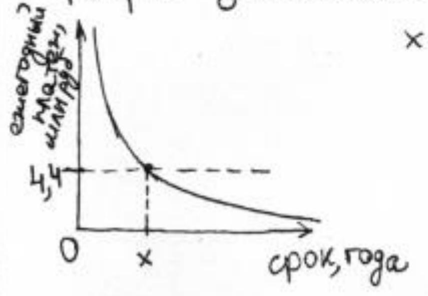
$$n\le 8$$

Ответ: 8 лет

№15.

График зависимости платежа от срока:

x-минимальный срок



Задание 15

Оценка эксперта:

1 балл

(15) $S = 16$ млн, n - кол-во лет; r - 15% $\Rightarrow k = 1 + \frac{r}{100} = 1{,}15$

год	долг	долг + %	выплаты
0	$\frac{n}{n}S$	$\frac{n}{n}Sk$	$x_1 = \frac{n}{n}Sk - \frac{n-1}{n}S$ – наибольший
1	$\frac{n-1}{n}S$	$\frac{n-1}{n}Sk$	$x_2 = \frac{n-1}{n}Sk - \frac{n-2}{n}S$
2	$\frac{n-2}{n}S$	$\frac{n-2}{n}Sk$	$x_3 = \frac{n-2}{n}Sk - \frac{n-3}{n}S$
⋮	...	...	...
$n-1$	$\frac{1}{n}S$	$\frac{1}{n}Sk$	$x_n = \frac{1}{n}Sk$
n	0	—	—

$\frac{n}{n}Sk - \frac{n-1}{n}S \le 4{,}4$ $\quad k - \frac{n-1}{n} \le 0{,}25$ $\quad n \ge 10$

$n - 1 \ge 0{,}9n$ $\quad$ Ответ: 10 лет

Задание 15

Оценка эксперта:

0 баллов

№15.

Долг (млн. руб) Возрастание Платежи (млн. руб)

16 на 15 % 4,4

(16 · 1,15) − 4,4 (1 год) − ост. 14 млн.

((16 · 1,15) − 4,4) · 1,15 − 4,4) (2 год) − ост. 11,7 млн

(((16 · 1,15) − 4,4) · 1,15 − 4,4) · 1,15 − 4,4) (3 год) − ост. 9,055

9,055 · 1,15 − 4,4 (4 год) − ост. 6,01325

6,01325 · 1,15 − 4,4 (5 год) − ост. больше 2,5 но меньше 3 => на 6 году долг будет погашен

Ответ: на 6 лет

№15 июль 16 млн

I январь 16 · 1,15 = 18,4

I февраль 16 · 1,15 − 4,4 = 14

II январь 14 · 1,15 = 16,1

II февраль 14 1,15 − 4,1 = 12

III январь 12 · 1,15 = 13,8

III февраль 12 · 1,15 − 3,8 = 10

IV январь 10 · 1,15 = 11,5

IV февраль 10 1,15 − 3,5 = 8

V январь 8 · 1,15 = 9,2

V февраль 8 1,15 − 3,2 = 6

VI январь 6 · 1,15 = 6,9

VI февраль 6 1,15 − 2,9 = 4

VII ~~январь~~ февраль 4 · 1,15 − 2,6 = 2

VIII февраль 2 1,15 − 2,3 = 0

Ответ: 8 лет.

Задание 15

Пусть S – сумма кредита, тогда по усл. $S = 16$ млн. руб.
r – процентная годовая ставка, тогда по усл. $r = 15\%$,

Оценка эксперта:
2 балла

$p = \frac{r}{100\%} = \frac{15\%}{100\%} = \frac{15}{100} = 0,15$

по усл. долг уменьшается на одну и ту же величину каждый год => это дифференцированные платежи
Пусть сумма, на которую долг равномерно уменьшается, обозначается за x
Пусть n – кол-во лет, в течение которых будут выплачивать кредит.
тогда $x = \frac{S}{n}$.
Составим таблицу:

год	долг до %	долг после %	платёж	долг после платежа
1	S	$S + Sp$	$Sp + x$	$S - x$
2	$S - x$	$S - x + (S-x)p$	$(S-x)p + x$	$S - 2x$
...	...	...	...	...
n	$S - x(n-1)$	$S - x(n-1) + (S - x(n-1))p$	$(S - x(n-1))p + x$	0

Долг уменьшается на одну и ту же величину, поэтому платежи образуют арифметическую прогрессию, причём убывающую, т.к. если мы посмотрим на платежи, то заметим, что платёж состоит из выплаты % по долгу и фиксированной x, выплаты % по долгу каждый год уменьшаются: $Sp, (S-x)p, \dots, (S-x(n-1))p$ => платежи тоже каждый год уменьшаются

Поэтому наибольший годовой платёж по кредиту был в 1-ом году: $Sp + x$.

По усл.: $Sp + x \le 4,4$

$16 \cdot 0,15 + x \le 4,4$

$x \le 4,4 - 2,4$

$x \le 2$ $\quad x = \frac{S}{n}$

$\frac{S}{n} \le 2$

$\frac{16}{n} \le 2 \quad | \cdot n > 0$

$16 \le 2n \Leftrightarrow n \ge 8 \Rightarrow n_{min} = 8$ – минимальный срок, на который взят кредит

$\times \begin{array}{r} 16 \\ 15 \\ \hline 80 \\ 16 \\ \hline 240 \end{array}$ $\quad 16 \cdot 0,15 = 2,4$

Ответ: 8.

Задание 16. Содержание критерия

ЕГЭ–2017-2022	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Задание 16.

ЕГЭ 2017	В трапеции $ABCD$ угол BAD прямой. Окружность, построенная на большем основании AD как на диаметре, пересекает меньшее основание BC в точках C и M. а) Докажите, что $\angle BAM = \angle CAD$. б) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника AOB, если $AB = 6$, а $BC = 4BM$.	5,8%
21.12.17	На диаметре AB окружности с центром O взята точка O_1. С центром в точке O_1 построена вторая окружность. Луч с началом в точке A касается второй окружности в точке C и пересекает первую окружность в точке D. а) Докажите, что прямая O_1C параллельна BD. б) Прямая O_1C пересекает окружность с диаметром AB в точках P и Q, причём точка P лежит на дуге ADB. Найдите площадь четырёхугольника $PDBQ$, если окружности касаются внутренним образом в точке B, $AB = 40$, а радиус второй окружности равен 15.	4,7%
ЕГЭ 2018	Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M и пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N. а) Докажите, что $AM = AN$. б) Найдите отношение $CD:DN$, если $AB:BC = 1:5$, а $\cos\angle BAD = \frac{1}{3}$.	2,2%
20.12.18 ТДТ	В равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана окружность. а) Докажите, что боковая сторона трапеции равна её средней линии. б) Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, если высота трапеции BH равна 9 и угол DAB равен $60°$.	10,4%
29.05.19 ЕГЭ	Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P. а) Докажите, что $OP = CP$. б) Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если расстояние от точки P до прямой AC равно 18, $\angle ABC = 60°$.	3,0%

Задание 16.

10.12.19 ТДТ	В трапеции $ABCD$ основания BC и AD равны 13 и 26 соответственно. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы ABM и DCM прямые. а) Докажите, что $AM = DM$. б) Найдите угол BAD, если угол ADC равен $74°$, а расстояние от точки M до прямой AD равно стороне BC.	1,8%
10.07.20 ЕГЭ	В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC, а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C, причём $CM = BC$ и $CN = AC$. а) Отрезки CH и CF — высоты треугольников ACB и NCM соответственно. Докажите, что прямые CH и CF перпендикулярны. б) Прямые BM и AN пересекаются в точке L. Найдите LM, если $BC = 4$, а $AC = 8$.	10,4%
28.01.21 ТДТ	Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. На окружности меньшего радиуса отмечена точка A, на окружности большего радиуса отмечена точка B так, что точки A, B и C являются вершинами прямоугольного треугольника с прямым углом C. Прямая AC вторично пересекает бóльшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D. а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны. б) Найдите длину отрезка BC, если радиусы окружностей равны $2\sqrt{2}$ и 8, а треугольник ABC равнобедренный.	7,5%
07.06.21 ЕГЭ	Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T. а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине. б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD = 10$, $AE = 2\sqrt{5}$.	3,9%

Задание 16.

Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD = 2BC$. На стороне CD взята точка M. Известно, что $DM : MC = 2 : 3$. а) Докажите, что прямая BM разбивает треугольник ACD на две фигуры, площади которых относятся как 9 к 46. б) Найдите площадь четырёхугольника $AKMD$, где K — точка пересечения прямой BM с диагональю AC, если высота трапеции равна $\frac{20}{3}$, а отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, равен 22.	92
Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, причём $AD = 1{,}6BC$. На стороне CD взята точка M. Известно, что $DM : MC = 2 : 5$. а) Докажите, что прямая BM разбивает треугольник ACD на две фигуры, площади которых относятся как 5 к 16. б) Найдите площадь четырёхугольника $AKMD$, где K — точка пересечения прямой BM с диагональю AC, если высота трапеции равна 14, а отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно её основаниям, равен 30.	208

Баллы	Количество участников	Процент
0	1661	98,9%
1	17	1,0%(2,6% - ЕГЭ 2021)
2	0	0,0%(0,3% - ЕГЭ 2021)
3	2	0,1%(0,9% - ЕГЭ 2021)

Задание 17 (ранее задание 18)

ЕГЭ 2017	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$\ln(4x-2)\cdot\sqrt{x^2-4x+4a-a^2}=0$$ имеет ровно один корень на отрезке $[0;2]$.	0,7%
21.12.17 ТДТ	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$|x-a^2-3a|+|x-a^2+2a|+|2x-a^2-a|=5a$$ имеет хотя бы один корень.	0,0%
ЕГЭ 2018	Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $$\begin{cases}x^4-y^4=6a-7,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$ имеет ровно четыре различных решения.	0,9%
20.12.18 ТДТ	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$a\cdot 9^x+(a+1)\cdot 3^x-3=0$$ имеет ровно один корень.	0,8%
29.05.19 ЕГЭ 2019	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$\frac{x^2+x+a}{x^2-2x+a^2+6a}=0$$ имеет ровно два различных корня.	2,7%

Задание 18.

10.12.19 ТДТ	Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $$\begin{cases} x^2+y^2+2(a-3)x-4ay+5a^2-6a=0, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$ имеет ровно четыре различных решения.	1,15%
10.07.20 ЕГЭ	Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $$\begin{cases} \sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2}, \\ x^2+y^2=8x+4y \end{cases}$$ имеет ровно два различных решения.	3,5%
28.01.21 ТДТ	Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений $$\begin{cases} \log_{36}(36-y^2)=\log_{36}(36-a^2x^2), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$ имеет ровно два различных решения.	2,5%
07.06.21 ЕГЭ	Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$\left|x^2-a^2\right|=\left|x+a\right|\cdot\sqrt{3x+a^2-6a}$$ имеет ровно два различных корня.	2,6%

Задание 17 (ранее задание 18)

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$\left(x^2-3x+a\right)^2=2x^4+2(3x-a)^2$$ имеет один корень на отрезке $[-2;0]$.	$a=-\frac{9}{4};\ -2<a\le 0.$
Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $$\left(x^2+4x-a\right)^2=2x^4+2(4x-a)^2$$ имеет один корень на отрезке $[0;3]$.	$0\le a<3;\ a=4.$

Баллы	Количество участников	Процент
0	1612	96,0%
1	33	2,0% (1,5% - ЕГЭ 2021)
2	2	0,1% (0,4% - ЕГЭ 2021)
3	9	0,5% (0,0% - ЕГЭ 2021)
4	24	1,4% (0,6% - ЕГЭ 2021)

Задание 17. Вариант 1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x^2-3x+a\right)^2=2x^4+2(3x-a)^2$$

имеет один корень на отрезке $[-2;0]$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$\left(x^2-3x+a\right)^2=2x^4+2(3x-a)^2$, $x^4-2x^2(3x-a)+(3x-a)^2=2x^4+2(3x-a)^2$,

$\left(x^2+3x-a\right)^2=0$, $x^2+3x-a=0$.

Пусть $f(x)=x^2+3x-a$. Последнее уравнение имеет один корень на отрезке $[-2;0]$ тогда и только тогда, когда выполнен один из трёх случаев: либо квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень и этот корень принадлежит отрезку $[-2;0]$, либо $f(x)$ имеет один корень на отрезке $[-2;0]$, равный 0 или -2, либо квадратный трёхчлен $f(x)$ принимает при $x=0$ и при $x=-2$ ненулевые значения разных знаков.

Рассмотрим первый случай.

Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень при равенстве нулю его дискриминанта, то есть при $9+4a=0$; $a=-\frac{9}{4}$. При $a=-\frac{9}{4}$ уравнение $x^2+3x-a=0$ имеет единственный корень $x=-\frac{3}{2}$, принадлежащий отрезку $[-2;0]$.

Рассмотрим второй случай.

Имеем $f(0)=-a$ или $f(-2)=-2-a$. Если $f(0)=0$, то $a=0$. При $a=0$ уравнение $x^2+3x-a=0$ имеет один корень $x=0$ на отрезке $[-2;0]$. Если $f(-2)=0$, то $a=-2$. При $a=-2$ уравнение $x^2+3x-a=0$ имеет корни $x=-2$ и $x=-1$ на отрезке $[-2;0]$.

Рассмотрим третий случай.

Значения $f(0)=-a$ и $f(-2)=-2-a$ имеют разные знаки тогда, когда $-a(-2-a)<0$; $-2<a<0$.

Следовательно, уравнение $\left(x^2-3x+a\right)^2=2x^4+2(3x-a)^2$ имеет один корень на отрезке $[-2;0]$ при $a=-\frac{9}{4}$; $-2<a\le 0$.

Ответ: $a=-\frac{9}{4}$; $-2<a\le 0$.

Задание 17. Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a=-2$ или исключением точки $a=0$	3
С помощью верного рассуждения получены значения $\left(-2;0\right]$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию корней уравнения $x^2+3x-a=0$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание 18 (ранее задание 19)

ЕГЭ 2017	На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5100. а) Может ли оказаться, что на доске написано число 250? б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 11? в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 11, может быть на доске?	7,2%
21.12.17 ТДТ	Бесконечная геометрическая прогрессия b_1, b_2, …, b_n, … состоит из различных натуральных чисел. Пусть $S_1 = b_1$ и $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ при всех натуральных $n \geq 2$. а) Приведите пример такой прогрессии, для которой среди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно два числа делятся на 36. б) Существует ли такая прогрессия, для которой серди чисел S_1, S_2, S_3, S_4 ровно три числа делятся на 36? в) Какое наибольшее количество чисел среди S_1, S_2,…, S_{10} может делиться на 36, если известно, что S_1 на 36 не делится?	1,8%
ЕГЭ 2018	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причём в школе №2 средний балл равнялся 18. Один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на 5%, средний балл в школе №2 также уменьшился на 5%. а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально? б) Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в неё учащийся школы №1. Какое наибольшее количество баллов мог набрать учащийся школы №2? в) Какое наибольшее количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?	2,5%

Задание 18 (ранее задание 19)

20.12.18 ТДТ	Конечная геометрическая прогрессия состоит из различных натуральных чисел. Произведение членов этой прогрессии является делителем числа 19600. а) Может ли эта прогрессия состоять из 3 членов? б) Может ли эта прогрессия состоять из 5 членов? в) Может ли эта прогрессия состоять из 4 членов?	3,6%
29.05.19 ЕГЭ	Последовательность (a_n) состоит из 100 натуральных чисел. Каждый следующий член последовательности, начиная со второго, либо вдвое меньше предыдущего, либо больше него на 90. а) Может ли такая последовательность быть образована ровно четырьмя различными числами? б) Чему может быть равно a_{100}, если $a_1 = 89$? в) Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел в такой последовательности?	11,3%
10.12.19 ТДТ	На доске написано 100 различных натуральных чисел, сумма которых равна 5130. а) Может ли оказаться, что на доске написано число 220? б) Может ли оказаться, что на доске нет числа 12? в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 12, может быть на доске?	5,84%
10.07.20 ЕГЭ	На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 6. а) Может ли сумма этих чисел быть равна 198? б) Может ли сумма этих чисел быть равна 270? в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 1518?	39,9%

Задание 18 (ранее задание 19)

2021 ТДТ	На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Вычислили их сумму. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых есть хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений и нашли новую сумму всех чисел всех групп. а) Могла ли новая сумма всех этих чисел стать больше старой в 8 раз? б) Могла ли новая сумма всех этих чисел стать больше старой в 17 раз? в) В какое наибольшее число раз новая сумма всех этих чисел может быть больше старой?	3,5%
2021 ЕГЭ	Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число. а) Может ли это отношение быть равным 34? б) Может ли это отношение быть равным 84? в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?	37,3%

Задание 18 (ранее задание 19)

На доске разрешается написать шестизначное натуральное число n, в десятичной записи которого нет нулевых цифр. Затем необходимо заменить на знак «+» какую-либо одну, не первую и не последнюю, из этих цифр и посчитать написанную сумму m. Например, можно написать число $n=123456$, заменить на знак «+» его четвёртую цифру и получить сумму $m=123+56=179$. а) Можно ли написать число n и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма $m=1109$? б) Можно ли написать число n, кратное 11, и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма m, которая также кратна 11? в) Сколько существует таких шестизначных чисел n, кратных 9, у которых можно заменить по этим правилам четвёртую цифру, чтобы в результате получилась сумма m, также кратная 9?	а) нет; б) да; в) 6561.
На доске разрешается написать шестизначное натуральное число n, в десятичной записи которого нет нулевых цифр. Затем необходимо заменить на знак «+» какую-либо одну, не первую и не последнюю, из этих цифр и посчитать написанную сумму m. Например, можно написать число $n=123456$, заменить на знак «+» его четвёртую цифру и получить сумму $m=123+56=179$. а) Можно ли написать число n и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма $m=1101$? б) Можно ли написать число n, кратное 36, и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма m, которая также кратна 36? в) Сколько существует таких шестизначных чисел n, кратных 9, у которых можно заменить по этим правилам третью цифру, чтобы в результате получилась сумма m, также кратная 9?	а) нет; б) да; в) 6561.

Задание 18

Баллы	Количество участников	Процент
0	1546	92,0%
1	113	6,7% (24,9% - ЕГЭ 2021)
2	17	1,0% (12,0% - ЕГЭ 2021)
3	1	0,1% (0,0% - ЕГЭ 2021)
4	3	0,2% (0,3% - ЕГЭ 2021)

Задание 18. Вариант 1

На доске разрешается написать шестизначное натуральное число n, в десятичной записи которого нет нулевых цифр. Затем необходимо заменить на знак «+» какую-либо одну, не первую и не последнюю, из этих цифр и посчитать написанную сумму m. Например, можно написать число $n=123456$, заменить на знак «+» его четвёртую цифру и получить сумму $m=123+56=179$.

а) Можно ли написать число n и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма $m=1109$?

б) Можно ли написать число n, кратное 11, и заменить по этим правилам его цифру, чтобы в результате получилась сумма m, которая также кратна 11?

в) Сколько существует таких шестизначных чисел n, кратных 9, у которых можно заменить по этим правилам четвёртую цифру, чтобы в результате получилась сумма m, также кратная 9?

Решение.

а) Если была заменена на знак «+» вторая или пятая цифра числа n, то $m \geq 1111+1=1112>1109$. Если же была заменена на знак «+» третья или четвёртая цифра числа n, то $m \leq 999+99=1098<1109$. Значит, получить сумму $m=1109$ невозможно.

б) Да, например, если написать кратное 11 число $n=122111$, то после замены на знак «+» второй его цифры получается сумма m=2112, которая также кратна 11.

в) Пусть $\overline{abcdef}=a\cdot 10^5+b\cdot 10^4+c\cdot 10^3+d\cdot 10^2+e\cdot 10+f$ — десятичная запись числа n, а a, b, c, d, e и f — его соответствующие ненулевые цифры в десятичной записи.

При делении на 9 число n даёт такой же остаток, что и сумма $s=a+b+c+d+e+f$. Значит, число n кратно 9 тогда и только тогда, когда s кратна 9. Поскольку на знак «+» заменили цифру d, сумма двух образовавшихся чисел даёт при делении на 9 такой же остаток, что и сумма сумм их цифр, равная $s-d$. Следовательно, числа n и m одновременно кратны 9 тогда, когда s кратна 9 и $d=9$.

Для каждого набора цифр b, c, d, e и f существует единственная ненулевая цифра a, для которой сумма s кратна 9. Следовательно, искомые числа однозначно определяются следующими условиями: $d=9$, b, c, e и f — произвольные ненулевые, a однозначно определяется из того, что сумма s кратна 9. Существует ровно $9^4=6561$ число n такого вида.

Ответ: а) нет; б) да; в) 6561.

Задание 18. Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*